数理解析研究所講究録
642巻 1988年 97-118

Whittaker vector について

MIT 松本 久義
(Hisayosi MATUMOTO)

§0 Introduction

Jacquet らによって、始められた Whittaker function の研究は、整数論への応用を目的としていたものであるが、最近では orbit theory や表現の特異性との関連が見い出されつつあり(一般化された意味での) Whittaker function は表現論 proper な観点からも興味を持たれるようになってきている。ここで表現の特異性というのは、Kashiwara-Vergne [KV1] の研究に端を発する Wave front set および Joseph らにより研究が始った Associated variety などである。これらについては、多くの数学者によっていろいろ努力がなされているとはいえ、まだいろいろなことがわかっていない。最近認識されるようになったことは、表現が(適当なクラスの) Whittaker function の空間に実現されるための条件と、表現の特異性の間に関連があるということ

である。　このことは．Kostant [Ko], Hashizume [Ha], Kashiwara-Vergne [KV2] らの先駆的な研究によって示唆されていたり．部分的な結果が得られていたりしたのであるが．最近になり Kawanaka による有限体上の reductive 代数群の generalized Gelfand-Graev 表現についての一連の研究により、強く認識されるようになった。　つまり局所体の場合でも同様なことが起っているだろうと期待されるわけである。　彼の与えた local field 上の reductive 群についての予想や．Gelfand-Graev 表現などについての歴史は [Ka1] を参照してほしい。　またこの線に沿った実半単純群に対する結果としては．Yamashita による一連の研究がある。　ここでは．実数体上の半単純 Lie 群についての話に限定し．代数的な (Kostant [Ko] によって導入された) 枠組みを考えることにする。　この枠組みで問題を定式化し．どのようなことが知られているか概観してみたい。

§1 Whittaker function と Whittaker vector

— 定義と問題の設定 —

1.1　G を connected な real semisimple linear

Lie group とする。 N を G の connected な nilpotent subgroup とし $\psi: N \to \mathbb{C}^\times$ を character (i.e. 1次元表現) とする。 function $f: G \to \mathbb{C}$ が G 上の (pair (N, ψ) についての) Whittaker function であるとは、

$$f(gn) = \psi(n)^{-1} f(g) \qquad (g \in G, n \in N)$$

をみたすこととする。Whittaker function で適当な class に属するもの全体 (例えば C^∞, L^2, real analytic, …) は適当な意味での (N, ψ) から G への induced representation の空間と考えられる。 つまり Whittaker function の空間には、G が左作用で act するのである。 ここでは N の character のみを考えているが、たとえば「N の他の既約表現からの induced rep. はどうなのか…」ということが考えられる。 しかし Kirillov の有名な理論により character でない N の既約 unitary 表現は、より小さな connected nilp. subgroup の unitary character からの induced rep. となるので、「N を固定していろいろな N の既約 unitary 表現からの G への induced rep. を調べる。」

ということは、「いろいろな N (parabolic の nilradical とは限らない) の character からの induced rep. を調べる。」

という立場にある意味で含まれるのである。 次に標数 $p>0$ の有限体上の reductive 代数群の場合には、上のような N の

全体は、この場合 p-subgroup 全体に対応することだけ注意しておく。

<u>1.2</u>　さてここでは、Whittaker function の空間として、real analytic な class を採用する。さらに定義を infinitesimal な形に書き直すことにより、次のように一般化する。

$\mathfrak{g}$ を G の complexified Lie algebra, $\mathfrak{n}$ を任意の $\mathfrak{g}$ の complex nilpotent subalgebra とする。さらに $\psi: \mathfrak{n} \to \mathbb{C}$ を $\mathfrak{n}$ の character とする。このとき (real analytic) Whittaker functions の空間を、

$$\mathcal{A}(G;\mathfrak{n},\psi) = \left\{ f \in \mathcal{A}(G) \,\middle|\, \frac{d}{dt} f(g\exp(tX))\Big|_{t=0} = -\psi(X) f(g) \quad (g \in G,\ X \in \mathfrak{n}) \right\}$$

とおく。ここで $\mathcal{A}(G) = \{G$ 上の real analytic function$\}$ である。$X \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathcal{A}(G;\mathfrak{n},\psi)$ に対して、

$$(X\cdot f)(g) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX)g)\Big|_{t=0}$$

で、左 $U(\mathfrak{g})$-module の構造を、$\mathcal{A}(G;\mathfrak{n},\psi)$ に入れることができる。(ただし、$U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra)。これは G-action を微分してできたものである。

ここで任意の left $U(\mathfrak{g})$-module M に対して

$$Wh^G_{\mathfrak{n},\psi}(M) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M, \mathcal{A}(G;\mathfrak{n},\psi))$$

と置こう。すると、以下のような問題が考えられる。

(問題 A) $Wh^G_{n,\psi}(M) \neq 0$ となるのはいつか？
(問題 B) $\dim Wh^G_{n,\psi}(M) < \infty$ となるのはいつか？
(問題 C) $\dim Wh^G_{n,\psi}(M)$ は何になるのか？

Gの表現論の立場からみれば M が Harish-Chandra module (以下 HC-module と略す) の場合が特に興味深い。

1.3. 代数的な手法を適用するため、ここでは Whittaker vector の概念を導入する。M を left $U(\mathfrak{g})$-module としたとき、M を complex vector space とみたときの dual space を M^* と置くと、M^* には自然に right $U(\mathfrak{g})$-module の構造が入る。ここで

$$Wh^*_{n,\psi}(M) = \{m \in M^* \mid m \cdot X = \psi(X)m \quad (X \in \mathfrak{n})\}$$

とおく。Ψ を $Wh^G_{n,\psi}(M) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M, \mathcal{A}(G; n, \psi))$ の元とすると、$v \in M$ に対して $\Psi(v) \in \mathcal{A}(G; n, \psi)$ の G の単位元での値を対応させることにより $Wh^*_{n,\psi}(M)$ の元が得られることがわかる。すぐわかるようにこの対応は単射であって、われわれは埋込み

$$(*) \qquad Wh^G_{n,\psi}(M) \hookrightarrow Wh^*_{n,\psi}(M)$$

を得る。ここで次のようなことが重要である。

(問題 D) (特に M が既約 HC-module のとき)

$$Wh^G_{n,\psi}(M) = Wh^*_{n,\psi}(M) \text{ はいつ成り立つか？}$$

問題A〜Cについては、$Wh^G_{\mathfrak{n},\psi}$ を $Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}$ にそっくりおきかえた問題を考えることもできる。それを問題A′〜C′ということにする。

§2 問題へのapproach (〜1986)

2.1 上述の問題についての最初の研究はKostant [Ko] と、Hashizume [Ha] によるものであろう。Kostantは、$\mathfrak{n}$ がBorel subalgebraのnilradical，ψ がadmissible character (大ざっぱに言えば退化していないもの、後で定義は述べる) であるとき、Whittaker vectorの概念を導入し、問題A′について以下のような結果を得た。

Th'm 2.1.1 (Kostant [Ko]) $\mathfrak{n}$ が $\mathfrak{g}$ のBorel subalgebra(のnilradical)で ψ がadmissible character on $\mathfrak{n}$. M が既約left $U(\mathfrak{g})$-moduleであるとする。このとき、$Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M)\neq 0$ ならば、M の $U(\mathfrak{g})$ におけるannihilator

$$\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)=\{u\in U(\mathfrak{g})\mid uM=0\}$$

はminimal primitive idealとなる。

ここでprimitive idealとは $U(\mathfrak{g})$ の両側idealであってあるirreducible moduleのannihilatorになっているものである。minimalとはそれらの中で包含関係で極小になっていることを言う。

注：上の定理は、Kostantが予想し、Casselman-ZuckermanがAn型のとき証明し、Kostantが一般の時証明した。

この定理 の逆は、残念ながら成立しない。たとえば M が既約 Verma module で $\mathfrak{n}$ について higest weight をもつものを考えればよい。しかし、Kostant は M が HC-module なら、以下のように逆が成り立つことを示した。

まず G が quasi-split であるとする。すると、G の Iwasawa 分解 $G=KAN$ を fix するとこの場合、N の complexified Lie algebra $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ のある Borel subalgebra の nilradical となる。このとき（もう1つの）Kostant の結果は次のように書かれる。

<u>Th'm 2.1.2 (Kostant [Ko])</u> 上の設定のもとで、

M が既約 HC-$(\mathfrak{g}, K)$-module であるとき、
$\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)$ が minimal primitive ideal ならば、
$Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M) \neq 0$ で $\dim Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M) < \infty$.

Kostant は、M が主系列表現のとき $\dim Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M)$ が little Weyl 群の位数に一致することも示している。

上の設定のもとで Goodman-Wallach は問題 D について、無限階微分作用素（Gevrey class の）として埋め込みを構成する手法により、次のような解答を与えた。

<u>Th'm 2.1.3 (Goodman-Wallach [GW])</u> 上の設定のもとで (i.e. G: quasi-split etc), M を HC-$(\mathfrak{g}, K)$-module とするとき

$$Wh^G_{\mathfrak{n},\psi}(M) = Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M)$$

したがってHC-moduleに対しては．問題A, Bの解答もこの場合は得られたことになる。

一方，Hashizumeは[Ha]において．Mがhighest weightをもつHC-moduleのときいつ$Wh^G_{n,\psi}(M)\neq 0$となるか？ということを研究した。ここではGに対する条件として．(quasi-splitは仮定せず) $G=KAN$をIwasawa分解としたときG/KがHermitian symmetric spaceとなるものを考える。($Sp(n,\mathbb{R})$, $SU(n,m)$ etc).

$\mathfrak{n}$をN a complexified Lie algebra，ψを$\mathfrak{n}$上のadmissible characterとする．

<u>Th'm 2.1.4 (Hashizume [Ha])</u>　$G\neq SL(2,\mathbb{R})$とすると．Mがhighest weightをもつHC-$(\mathfrak{g},K)$-moduleであるとき

$$Wh^G_{n,\psi}(M)=0.$$

(注) [Ha]ではもっと精密な結果が述べられている。

さらに[Ha]ではgeneralized Whittaker modelとして．上記の$\mathfrak{n}$以外のもっと小さなnilpotent subalgebra $\mathfrak{n}'$で$Wh^G_{n',\psi}(M)\neq 0$となるようなものが考察されている。

<u>2.2</u>　上記の[Ha]の結果においてhighest weightをもつHC-module Mのannihilatorは"大きく"(たとえば有限次元表現の，finite codimensional)，Mは比較的"小さな"$U(\mathfrak{g})$-moduleと考えられる。したがって

Kostant, Hashizume の結果はともに $Wh_{n,\psi}^{G}(M) \neq 0$ なら M はある程度"大きく"なくてはならないことを言っている。ここで $U(\mathfrak{g})$-module の"大きさ"を量る invariants として、以下のような（よく知られた）概念を導入しよう。以下 M を有限生成 left $U(\mathfrak{g})$-module とする。まず

$$U_n(\mathfrak{g}) = \{n \text{ 個以下の } \mathfrak{g} \text{ の元の積ではられる } U(\mathfrak{g}) \text{ の元}\} \quad (n>0)$$

$$U_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}, \quad U_{-n}(\mathfrak{g}) = \{0\} \quad (n>0)$$

とおいて $U(\mathfrak{g})$ に filtration を定める。すると associated graded ring

$$\mathrm{gr}\,U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} U_n(\mathfrak{g}) / U_{n-1}(\mathfrak{g})$$

は、P-B-W Th'm より $\mathfrak{g}$ の symmetric algebra $S(\mathfrak{g})$ になることがわかる。$v_1, \cdots, v_m$ を M の生成元として M に filtration を $M_n = \sum_{k=1}^{m} U_n(\mathfrak{g}) v_k$ で導入する。すると、$\mathrm{gr}\,M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n / M_{n-1}$ は $S(\mathfrak{g})$-module の構造を自然にもつ。ここで $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}^*$ 上の polynomial ring と自然に同一視しておく。このとき、M の associated variety を

$$\mathrm{Ass}(M) = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0 \text{ for all } f \in \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}(\mathrm{gr}\,M)\}$$

とおく。よく知られているように $\mathrm{Ass}(M)$ は $v_1, \cdots, v_m$ のとりかたによらず well-defined である。さらに、

$$\mathrm{Dim}(M) = \underset{(\text{alg. varietyとしての次元})}{\dim} \mathrm{Ass}(M)$$

とおき、M の Gelfand-Kirillov dimension という。

さらに、可換環の次元論における古典的な結果より、ある多項式 $\chi(t) \in \mathbb{Q}[t]$ があって、

$$\dim M_n = \chi(n)$$

が、十分大きなすべての整数 n に対してなりたち、

$$\chi(n) = \frac{c(M)}{(\mathrm{Dim}(M))!} t^{\mathrm{Dim}(M)} + \text{lower terms}$$

となる正整数 $c(M)$ が存在することが知られている。

一般に $\chi(t)$ は $v_1, \cdots, v_m$ によるが、$c(M)$ はよらず well-defined である。これは M の multiplicity と呼ばれる。よく知られている結果として、

Th'm 2.3.1 I を $U(\mathfrak{g})$ の primitive ideal とするとき次は同値。

① I は minimal

② $\mathrm{Ass}(U(\mathfrak{g})/I)$ は regular nilpotent orbit の Zariski closure (つまり nilpotent elt 全体 : Killing form で $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ としている)

③ $\mathrm{Dim}(U(\mathfrak{g})/I) = \dim \mathfrak{g} - \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$

ここで Th'm 2.1.1 の一般化を紹介するため、以下のような状況設定をしよう。

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$ を任意の graded structure (i.e. $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subseteq \mathfrak{g}(i+j)$) とする。$\mathfrak{g}(s) \neq 0$ なる $s > 0$ を、

fixする。 $\mathfrak{g}^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)^*$ を対応する分解とする。

ここで、

$$\mathfrak{n}_s = \bigoplus_{i\geqq s}\mathfrak{g}(i)$$

なる $\mathfrak{g}$ のnilpotent subalgebraを考えると、

$$[\mathfrak{n}_s,\mathfrak{n}_s]\subseteq \bigoplus_{i\geqq s+1}\mathfrak{g}(i)$$

となることより、$\mathfrak{g}(s)^*$ の元 ψ は $\mathfrak{n}_s$ のcharacterとみなせる。ここで任意の $\mathfrak{g}$ のparabolic subalgebraの、nilradicalとその任意のcharacterのpairは上記の $(\mathfrak{n}_s,\psi)$ によって表わされる。つまり $\mathfrak{p}$ を任意のparabolic subalgebra $\mathfrak{n}$ をそのnilradicalとすると、$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}(\mathfrak{p}:i)$ なるgrad. str.で、$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1$, $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{p}=\bigoplus_{i\geqq 0}\mathfrak{g}(\mathfrak{p},i)$ となるものがuniqueに存在することがすぐわかる。さてこの状況のもとへのTh'm 2.1.1の一般化は、

Th'm 2.3.2 ([Ma1]) $\psi\in\mathfrak{g}(s)^*$ に対して M が既約 left $U(\mathfrak{g})$-moduleで、$I=\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)$ のとき、

$$Wh^*_{\mathfrak{n}_s,\psi}(M)\neq 0$$

ならば、

$$\overline{Ad^*(G_c)\psi}\subseteq \mathrm{Ass}(U(\mathfrak{g})/I).$$

[注 この条件は $\psi\in\mathrm{Ass}(U(\mathfrak{g})/I)$ と同値

ただし、G_c は、$\mathfrak{g}$ のadjoint groupで $Ad^*(G_c)\cdot\psi$ は ψ を含むcoadjoint orbit，上につけたbarはZariski closureを表わす。(特にGabberの結果よりこのとき $\mathrm{Dim}(M)\geqq\frac{1}{2}\dim Ad^*(G_c)\psi$ となる。)

Thm 2.3.1 より上の結果で，$\mathfrak{n}_s$ が Borel subalg の nilradical となる（つまりある Borel subalg $\mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(\mathfrak{b}; i)$，$s=1$ を考える場合を考える）とすると，その場合は Kostant の結果そのものとなる。

<u>2.4</u> Lynch は MIT での Thesis において以下のような $(\mathfrak{n}, \psi)$ の class を導入した。

まず $\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$ が admissible であるとは，$\mathfrak{p}$ の Richardson orbit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$（つまり $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{p}$ の nilradical としたとき $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{n}$ が $\mathfrak{n}$ で open となる nilpotent orbit．これは unique にきまる）に対して，$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{g}(\mathfrak{p}; 1) \neq \phi$ となることとする。したがって $\mathfrak{p}$ が admissible なら，$\mathfrak{p}$ の nilradical $\mathfrak{n}$ 上の character ψ で，Killing form による同一視で $\psi \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ となるものが存在し，これを admissible character という。このとき $(\mathfrak{n}, \psi)$ を admissible pair という。Kostant は彼の結果を証明するために admissible character で twist した $\mathfrak{n}$-cohomology の消滅定理を $\mathfrak{n}$ が Borel の nilradical の時に示したが，Lynch は一般の admissible な場合にそれらの結果を拡張した。Lynch はまた主系列表現の Whittaker vector の次元についての Kostant の結果を quasi-split でない場合へと拡張している。

Kostant-Lynchのcohomology消滅定理を使うと、次のことがわかる。

<u>Th'm 2.4.1</u> (Vogan-Matumoto [Ma2])

$(\mathfrak{n}, \psi)$ をadmissibleなpairで M が $U(\mathfrak{n})$-moduleとして有限生成な $U(\mathfrak{g})$-moduleとすると、

$$\dim Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M) = \begin{cases} c(M) & \mathrm{Dim}(M) = \dim \mathfrak{n} \text{ のとき} \\ 0 & \mathrm{Dim}(M) < \dim \mathfrak{n} \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし上のmultiplicityは $U(\mathfrak{n})$-moduleとしてのもの。

(注：上のような M については容易にわかるようにつねに $\mathrm{Dim}(M) \leq \dim \mathfrak{n}$)

特に G として (quasi-splitと限らない一般の) connected real semisimple linear Lie groupとするとき、$G = KAN$ をIwasawa分解、$\mathfrak{n}$ を N のcomplexified Lie algebraとおくと、任意のHC-$(\mathfrak{g}, K)$-moduleはCasselman-OsborneのTh'm [CO] より $U(\mathfrak{n})$-moduleとして有限生成となり次の系を得る。

<u>Cor 2.4.2</u> ([Ma2])

$G = KAN$, $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\psi : \mathfrak{n} \to \mathbb{C}$: admissible character, M : HC-$(\mathfrak{g}, K)$-moduleのとき、

$$\dim Wh^*_{\mathfrak{n},\psi}(M) = \begin{cases} c(M)_{(>0)} & \mathrm{Dim}(M) = \dim \mathfrak{n} \text{ のとき} \\ 0 & \mathrm{Dim}(M) < \dim \mathfrak{n} \text{ のとき} \end{cases}$$

(注：この場合 Joseph の結果 [Jo] より、$U(\mathfrak{n})$-module としての multiplicity と $U(\mathfrak{g})$-module としてのそれは一致する。) この場合について、Goodman-Wallach の結果も拡張できることがわかる。つまり

Th'm 2.4.3 ([Ma2])
Cor 2.4.2 の条件のもとで
$$Wh^{*}_{\mathfrak{n},\psi}(M) = Wh^{G}_{\mathfrak{n},\psi}(M)$$

$\mathfrak{n}$ が real form の minimal parabolic subalgebra の nilradical でないときは、まだ[予想はいろいろ立てられるが(たとえば [Ma2] 0.3 Conjecture H)] 問題のほとんどが未解決である。ただ別な極端な場合である $\mathfrak{n}$ が abelian な場合についてはかなりよくわかっている。このことは後述する。

Th'm 2.4.1 を他の admissible pair に適用できないのは、Casselman-Osborne の Th'm の類似がその場合なりたたないことによる。つまり

「$\mathfrak{q}$ が $\mathfrak{g}$ の (admissible な) parabolic subalgebra で $\mathfrak{n}$ が nilradical のとき、HC-$(\mathfrak{g}, K)$-module M が $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}}$ をみたすなら、M は $U(\mathfrak{n})$-module として有限生成」

といったことが成り立つといいのだが、そうはいかないからで

ある。このことは、$q: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ を自然な projection としたとき、$\mathfrak{n}$ が minimal parabolic subalgebra の nilradical でないならば、$q|_{\mathrm{Ass}(M)}$ が finite map とならないことの反映である。

§3 Abelian case と問題Bについて

最後に最近になって得られた結果について触れてみたい。

3.1. まず $\mathfrak{f}$ を任意の complex Lie algebra としたとき $U(\mathfrak{f})$ の quotient field (斜体となる) $K(\mathfrak{f})$ が定義されることに注意する。(cf. Dixmier "Enveloping alg")

Th'm 3.1.1 $\mathfrak{g}$ を任意の complex Lie algebra, $\mathfrak{f}$ をその任意の subalgebra とする。M を有限生成 left $U(\mathfrak{g})$-module で $\mathrm{Dim}(M) \leq \dim \mathfrak{f}$ をみたすものとする。(M は $U(\mathfrak{f})$-module としては有限生成とは限らない。) そのとき $K(\mathfrak{f}) \underset{U(\mathfrak{f})}{\otimes} M$ は $K(\mathfrak{f})$-vector space として有限次元でその次元は $C'(M)$ を超えない。ただし

$$C'(M) = \begin{cases} C(M) & \text{if } \mathrm{Dim}\, M = \dim \mathfrak{f} \\ 0 & \text{if } \mathrm{Dim}\, M < \dim \mathfrak{f} \end{cases}$$

証明 M は $U(\mathfrak{f})$-module として有限生成とは限らないが、可算な生成系 $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がとれることはすぐわかる。

ここで最初の m 個 $v_1, \cdots, v_m$ で M は $U(\mathfrak{g})$-module として生成されるとしておく。

ここで $m \leq l \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{F}_n^{(l)} M = \sum_{i=1}^{l} U_n(\mathfrak{g}) v_i$$

$$F_n^{(l)} M = \sum_{i=1}^{l} U_n(\mathfrak{f}) v_i$$

$$F_\infty^{(l)} M = \sum_{i=1}^{l} U(\mathfrak{f}) v_i$$

とおく。もちろん

$$(\star) \begin{cases} F_n^{(l)} M \subseteq \tilde{F}_n^{(l)} M \\ F_n^{(l)} M \subseteq F_n^{(l')} M \\ \tilde{F}_n^{(l)} M \subseteq \tilde{F}_n^{(l')} M \end{cases} \qquad (l' \geq l)$$

さて可換環論の古典的な結果より、ある polynomial $\chi_l(t) \in \mathbb{Q}[t]$ および $\tilde{\chi}_l(t) \in \mathbb{Q}[t]$ があって十分大きな n に対して

$$\tilde{\chi}_l(n) = \dim \tilde{F}_n^{(l)} M \ , \quad \chi_l(n) = \dim F_n^{(l)} M$$

また、$\tilde{\chi}_l(t) = \dfrac{c(M)}{(\mathrm{Dim}(M))!} t^{\mathrm{Dim}(M)}$ + lower terms

よって $\tilde{\chi}_l(t) = \dfrac{c'(M)}{(\dim \mathfrak{f})!} t^{\dim \mathfrak{f}}$ + lower terms

となる。

$(\star)$ より、$\deg \chi_l(t) \leq \dim \mathfrak{f}$ であって $\chi_l(t)$ の $t^{\dim \mathfrak{f}}$ の係数は $\dfrac{c'(M)}{(\dim \mathfrak{f})!}$ を超えないことがわかる。

つまり.
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dim}\,(F_\infty^{(l)}M) \leq \dim \mathfrak{g} \\ c'(F_\infty^{(l)}M) \leq c'(M) \end{array}\right\} (☆☆)$$

ただし左辺は $U(\mathfrak{g})$-module としての Dim と c'。

さて、各 $l = 0, 1, 2 \cdots$ に対して次の2つの case を考えよう。

<u>Case 1</u> $\quad U(\mathfrak{g})\cdot v_{l+1} \cap F_\infty^{(l)}M = \{0\}$

<u>Case 2</u> $\quad U(\mathfrak{g})\cdot v_{l+1} \cap F_\infty^{(l)}M \neq \{0\}$

Thm は次の claim より直ちに得られる。

<u>Claim</u> Case 1 は高々 $c'(M)$ 個の l に対してしか成り立たない。

∵) もし主張が成り立たないとすると、十分大きな l に対して

$$(☆☆☆) \quad \underbrace{U(\mathfrak{g}) \oplus \cdots \oplus U(\mathfrak{g})}_{c'(M)+1\ コ} \hookrightarrow F_\infty^{(l)}M$$

となる。両辺は $U(\mathfrak{g})$-module として有限生成で、すぐわかるように左辺の Gelfand-Kirillov dimension は、$\dim \mathfrak{g}$ で、multiplicity は $c'(M)+1$ となるが、これは (☆☆), (☆☆☆) に矛盾する。 QED.

ここで $I(\mathfrak{g}; M) = \dim_{K(\mathfrak{g})} K(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} M$

とおき ~~[illegible]~~ intersection number という。

3.2. Th'm 3.1.1 においては商体 $K(\mathfrak{f})$ を考えたが、$\psi: \mathfrak{f} \to \mathbb{C}$ なる Character について、$Wh^*_{\mathfrak{f},\psi}(M)$ を考察するためには、ψ の kernel に関する $U(\mathfrak{f})$ の"局所化"を考察すべきである。そのためには $\mathfrak{f}$ が abelian である必要がある。次の Th'm は Th'm 3.1.1 と同じ議論を用いて得られる。

Th'm 3.2.1 $\mathfrak{g}$ を任意の complex Lie algebra $\mathfrak{f}$ をその任意の abelian subalgebra とする。さらに M を $\mathrm{Dim}(M) \leq \dim \mathfrak{f}$ である有限生成 left $U(\mathfrak{g})$-module とする。すると $\mathfrak{f}^*$ の以下のような条件, 1°, 2° をみたす algebraic subvarieties の可算族 $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在する。

1° $\dim I_i < \dim \mathfrak{f}^*$ for all $i \in \mathbb{N}$.

2° 任意の $\psi \in \mathfrak{f}^* - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ に対して

$$\dim Wh^*_{\mathfrak{f},\psi}(M) = I(\mathfrak{f}; M) \quad (\text{特に} < \infty)$$

さらに、$q: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{f}^*$ を自然な projection として $q(\mathrm{Ass}(M))$ が $\mathfrak{f}^*$ で Zariski dense なら、$I(\mathfrak{f}; M) > 0$ だから このとき 任意の $\psi \in \mathfrak{f}^* - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ に対して、 $Wh^*_{\mathfrak{f},\psi}(M) \neq 0$

このTh'mのCor.として、次をうる。

<u>Cor. 3・2・2</u>　Gが connected real semisimple Linear Lie group，PをGの maximal parabolic subgroupで、そのnilradical Nがabelianなものとする。$\mathfrak{n}$をNのcomplexified Lie algebraとし、$\psi: \mathfrak{n} \to \mathbb{C}$をadmissibleなcharacterで$N$の<u>unitary</u> characterの微分になっているものとする。
このとき、$\mathrm{Dim}(M) \leq \dim \mathfrak{n}$であるHC-$(\mathfrak{g}, K)$-module Mに対して

$$\dim Wh^{G}_{\mathfrak{n}, \psi}(M) < \infty .$$

(注)：上のCor.をnon-abelianなNに対して拡張しようとすると、$\mathfrak{p} = \mathrm{Lie}(P) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$としたとき、$M$が$U(\mathfrak{p})$-moduleとして有限生成で$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$が$\mathfrak{p}$のidealになっていることをつかえば、$M/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]M$に、$(\mathfrak{g} = \mathfrak{p}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}],\ \mathfrak{f} = \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$として、Th'm 3.2.1をapplyできそうにみえる。しかしそのためには、$\mathrm{Dim}(M/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]M) \leq \dim(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}])$を示さねばならず、~~結局~~ 結論としては、

(*)「$\mathrm{Ass}(M)$と$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^{\perp} \subseteq \mathfrak{g}^*$はtransversalに交わる。(i.e. $\mathrm{Ass}(M) \cap [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^{\perp}$の次元は$\dim \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$以下)」

ということが示せればOKである。

したがって
(*,*)「$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ としたとき、parabolic subalgebra $\mathfrak{p}$ に対して、$\mathfrak{k}^{\perp} \cap \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ と $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^{\perp}$ が transversal に交わる」といったことがなりたてば それに対応して Cor 3.2.2 は拡張できることになる。ただ上の (*,*) がどのような non-abelian な $\mathfrak{p}$ に対して成りたつのか、反例も含めてよくわからない。

(上の (*,*) は、$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq 0$ なら少しも明らかではない。
たとえば類似の
(**)『$\mathfrak{k}^{\perp} \cap \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}$ と $\mathfrak{n}^{\perp}$ が transversal に交わる』というのは、Casselman-Osborne の結果と関連しており、$\mathfrak{n}$ が minimal psalg の nilradical でないと、常に偽である。)

References

[CO] W. Casselman and M.S. Osborne, The restriction of admissible representations to $\mathfrak{n}$, Math Ann., 233 (1978), 193-198.

[Ha] M. Hashizume, Whittaker models for representations with highest weights, Lectures on harmonic analysis on Lie groups and related topics (Strasbourg, 1979), 45-50, Lectures in Math. 14 Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1982

[Jo] A. Joseph, Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra II, J. Algebra 65 (1980), 284-306

[Ka1] N. Kawanaka, Shintani lifting and Gelfand-Graev representations, to appear in Proc. Symp. Pure Math. (Proc. AMS Summer Institute at Arcata, 1986)

[Ka2] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field I, Invent. Math. 84 (1986), 575-616

[Ko] B. Kostant, On Whittaker vectors and representation theory, Invent. Math. 48 (1978), 101-184

[KV1] M. Kashiwara and M. Vergne, K-types and the singular spectrum, in "Non-commutative Harmonic Analysis" Lecture Notes in Maths, No728 Springer, 1979

[KV2] ——, ——, Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane, LMM, No728 Springer.

[Ly] T. E. Lynch, Generalized Whittaker vectors and representation theory, Thesis MIT 1979

[Ma1] H. Matumoto, Whittaker vectors and associated varieties, Invent. Math. 89 (1987) p219–224

[Ma2] H. Matumoto, Whittaker vectors and Goodman-Wallach operators, priprint 1987.

[Ya1] H. Yamashita, On Whittaker vectors for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 26 (1986), 263-298.

[Ya2] H. Yamashita, Multiplicity one theorems for generalized Gelfand-Graev representations of semisimple Lie groups and Whittaker models for the discrete series, priprint, 1987.